Kalman Filter와 쿼터니언으로 ARS 설계

KITECH 양광웅 작성
Page365@gmail.com

로봇의 자세를 측정하기 위해 Kalman Filter와 쿼터니언(Quaternion)으로 ARS(Attitude Reference System)를 설계한다. 3차원 자이로 센서와 가속도 센서에서 측정한 각도를 Kalman Filter로 융합하여 각도를 계산한다.

Kalman Filter

칼만필터는 상태변수($\mathbf{x}$)의 최적 추정치($\hat{\mathbf{x}}$)를 구하는 방법으로 상태변수의 오차를 최적화 하는 필터이다. 예측(prediction)과 보정(correction) 과정으로 구분되며, 전체 흐름도는 아래와 같다.

Initial estimates for $\mathbf{x}_0$ and $\mathbf{P}_0$

<predict>
(1) Project the state ahead
$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}$$
(2) Project the error covariance ahead
$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$$

<correct>
(1) Compute the Kalman gain
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$
(2) Update estimate with measurement $\mathbf{z}_k$
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$$
(3) Update the error covariance
$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-$$

Initialize

쿼터니언을 상태변수 $\mathbf{x}$로 정의한다.

$$\mathbf{x} \triangleq q = \{\boldsymbol{\varepsilon},\ \eta\} = \{\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \eta\}$$

그리고 다음과 같이 상태변수(쿼터니언)와 공분산 행렬을 초기화 한다.

$$\mathbf{x}_0 = q_0 = \{0, 0, 0, 1\}$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Predict 과정

System Model

상태변수(쿼터니언)의 미분은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{\omega}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Xi}_{q}\boldsymbol{\omega}$$

상기 미분 방정식을 Euler 방법으로 수치해석적 적분하는 과정은 다음과 같이 이산 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{\omega}\mathbf{x}_{k}\Delta t = \mathbf{x}_{k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Xi}_{q}\boldsymbol{\omega}_{k}\Delta t$$

여기서 $\boldsymbol{\Omega}_{\omega}$ 와 $\boldsymbol{\Xi}_{q}$ 는 "쿼터니언의 미분" 절에서 정의된 행렬이다.

$\mathbf{A}_{k}$ 와 $\mathbf{B}_{k}$ 는 상태전이행렬로 시스템 모델의 각 변수에 대한 자코비안이다.

$$\mathbf{A}_{k} \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k}} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{\omega}\Delta t$$

$$\mathbf{B}_{k} \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}}{\partial \boldsymbol{\omega}_{k}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Xi}_{q}\Delta t$$

predict

직전 추정값과 오차 공분산으로부터 예측값을 계산한다. 상태변수가 쿼터니언이기 때문에 시스템 모델을 사용하지 않고 쿼터니언의 곱 연산자를 사용하여 상태변수를 업데이트 한다.

$$\cancel{\hat{\mathbf{x}}_{k}^{-} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{-} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} * \mathrm{Q}(\omega_{x}\Delta t, \omega_{y}\Delta t, \omega_{z}\Delta t)$$

$$\mathbf{P}_{k}^{-} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^{T} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{Q}\mathbf{B}_{k-1}^{T}$$

여기서 시스템 입력에 대한 공분산 행렬 $\mathbf{Q}$ 는 실제 수집된 데이터의 공분산 값을 취하는 것이 적절할 것이다. 하지만 여기서는 임의로 다음과 같이 선정하였다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Correct 과정

Error measurement

먼저, 가속도 센서의 측정값 $\mathbf{a}$ 을 쿼터니언으로 변환한다.

$$q_a = \{\mathbf{a},\ 0\}$$

센서 좌표계를 기준으로 한 값 q_a 를 전역 좌표계 기준으로 변환한다. 이 때, 각속도를 적분하고 있는 상태변수($\mathbf{x} = q$)를 사용하여 다음과 같이 변환한다. (쿼터니언으로 벡터의 회전 참조: Wikipedia: Quaternions and spatial rotation)

$$q_g = q * q_a * q^{-1}$$

다음 과정은 q_g 가 중력가속도와 틀어진 각도(ϕ_e)와 회전 축($\mathbf{n}_g$)을 계산한다.
(벡터의 외적 성질을 이용한다: $\|a \times b\| = \|a\|\|b\|\sin\theta$)

$$\mathbf{n}_g = \boldsymbol{\varepsilon}_g \times \mathbf{g}$$

$$\phi_e = \sin^{-1}\left(\frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_g \times \mathbf{g}\|}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_g\|}\right)$$

여기서 $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ 는 $\bar{q}_g$ 의 벡터 부분인 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ 이며 $\mathbf{g} = (0, 0, -1)$ 는 중력가속도의 방향 이다.

상기 함수에 대한 자코비안 행렬 $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 을 구한다.

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \phi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2}{\alpha\beta} & \dfrac{\varepsilon_2 \varepsilon_3^2}{\alpha\beta} & \dfrac{\varepsilon_3 \beta}{\alpha} \end{bmatrix}$$

여기서 $\alpha = \varepsilon_3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$, $\beta = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ 이다.

측정잡음에 대한 공분산 행렬 $\mathbf{R}$ 은 다음과 같이 정한다.

$$\mathbf{R} = [1]$$

Update

예측값과 측정값으로부터 새로운 예측값을 계산한다. 상태변수가 쿼터니언이기 때문에 측정 모델을 사용하지 않고 쿼터니언의 곱 연산자를 사용하여 상태변수를 업데이트 한다.

칼만 게인 계산:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R})^{-1}$$

상태변수와 공분산 행렬 업데이트:

$$\cancel{\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-))}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathrm{Q}(\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k \phi_e, \mathbf{n}_g) * \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^-$$

여기서 $\mathbf{H}_k$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{H}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad 0]$$

Quaternion 정리

쿼터니언은 3개의 벡터 요소와 하나의 스칼라 요소로 구성된다.

$$q = \{\boldsymbol{\varepsilon},\ \eta\} = \{\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \eta\}$$

오일러각을 쿼터니언으로 변환

오일러각 $\Lambda = (\phi, \theta, \psi)$ 로 쿼터니언을 다음과 같이 계산한다.

$$q = \mathrm{Q}(\Lambda) = \mathrm{Q}_z(\psi) * \mathrm{Q}_y(\theta) * \mathrm{Q}_x(\phi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) - \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) + \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) - \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) + \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) \end{bmatrix}$$

여기서

$$\mathrm{Q}_z(\psi) = \{0, 0, \sin(\psi/2), \cos(\psi/2)\},$$
$$\mathrm{Q}_y(\theta) = \{0, \sin(\theta/2), 0, \cos(\theta/2)\},$$
$$\mathrm{Q}_x(\phi) = \{\sin(\phi/2), 0, 0, \cos(\phi/2)\}.$$

위 식에서 쿼터니언의 곱은 다음과 같이 계산한다.

$$\mathrm{Q}_1 * \mathrm{Q}_2 = \{\eta_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2\}$$

쿼터니언의 미분

쿼터니언의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_\omega q = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}_q \boldsymbol{\omega} \qquad (1)$$

여기서

$$\boldsymbol{\Omega}_\omega = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}\times & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad \because\ \boldsymbol{\omega}\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_q = \begin{bmatrix} \eta & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & \eta & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & \eta \\ -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \end{bmatrix}$$

이다.